

Verslagen van de Studiegroep
Wiskunde met de Industrie 2008

*63rd European Study Group
Mathematics with Industry*

28 Januari – 1 Februari 2008

Bennie Mols

November 2008

www.math.utwente.nl/swi2008

Voorwoord

Wie wel eens een pinpas gebruikt, een CD opzet of een vliegtuig neemt, maakt indirect gebruik van onmisbare resultaten en inzichten die de wiskunde door de eeuwen heen heeft opgeleverd. Het beeld van wiskundigen als studeerkamer-geleerden die zich nooit met de werkelijkheid maar alleen met abstracte vergelijkingen en getallen bezighouden, klopt dan ook niet. Maar veel mensen beseffen dat niet, omdat de gebruikte wiskunde vaak niet expliciet zichtbaar is.

De Studiegroep Wiskunde en de Industrie is een jaarlijks terugkerend evenement waarbij de wiskunde een week lang op zeer zichtbare wijze toegepast wordt. Er wordt in groepsverband gewerkt aan concrete problemen die aangedragen worden door het bedrijfsleven of de overheid. Dit boekje is een verslag van de Studiegroep die in 2008 gehouden werd. Er waren toen 78 enthousiaste deelnemers, uit binnen- en buitenland, die samen aan zes problemen gewerkt hebben.

Het betrof opdrachten die sterk varieerden, van problemen op zeer grote schaal tot op zeer kleine schaal. Zo wilde Thales graag dat onderzocht werd hoe sensoren het beste geplaatst kunnen worden in een groot netwerk om gebeurtenissen zo efficiënt mogelijk te detecteren. Zulke sensoren worden bijvoorbeeld gebruikt bij de beveiliging van gebouwen. Bij een gegeven aantal detectoren kunnen sommige configuraties veel beter werken dan andere. Tijdens de studieweek is dan ook gezocht naar de optimale plaatsing, en betere algoritmen om de data van een grote hoeveelheid sensoren te verwerken.

Een andere groep werkte aan rangeerproblemen voor treinen bij de NS. Het in de juiste volgorde combineren van treinstellen op een rangeerterrein met slechts een beperkt aantal sporen levert een ingewikkeld combinatorisch probleem op. De wiskunde kan dan helpen om de tijd, de personen en de beschikbare infrastructuur zo efficiënt mogelijk te benutten.

Voor Corus werd onderzocht hoe de kwaliteit van aluminiumlegeringen verbeterd zou kunnen worden. De berekeningen die gedaan moeten worden om dat te bewerkstelligen maken gebruik van enorme hoeveelheden gegevens. Er werd een verbetering bedacht die een database van 1000 gigabytes terug wist te brengen tot 1,25 gigabytes. Een schaalverkleining van een factor 800 dus!

Een ander probleem, op een nog grotere schaal, betrof een vraag van het Waterschap Regge en Dinkel. Men wilde weten of wiskundige technieken kunnen helpen bij het analyseren van strategieën om regenwater af te voeren. Die afvoer geschiedt via een complex netwerk van grotere riviertjes en kleinere slootjes. Door analyse van afvoerpieken kon worden aangeven

waar en wanneer opslag of juist doorsluiting van water gunstig is om overstromingen te voorkomen.

Het Amsterdams Medisch Centrum formuleerde juist een probleem op een zeer kleine schaal: de neuronen in onze hersenen. De informatie die deze neuronen versturen kunnen in sommige gevallen gemeten worden, maar de signalen die daarbij gegenereerd worden zijn uitermate complex. Aan de Studiegroep de vraag of er methoden geformuleerd kunnen worden die de essentiële informatie uit de enorme hoeveelheid gegevens destilleren.

Ook bij het probleem van NXP werd juist op het kleine gefocussed. Om de batterijen in volgende generaties mobiele telefoons langer mee te laten gaan, worden nieuwe transistoren onderzocht. Die zijn gebaseerd op micro-elektromechanische schakelaars die zich in meerdere niet-lineaire evenwichtstoestanden kunnen bevinden. Het berekenen van die toestanden is een lastig wiskundig probleem, dat opgelost moet worden voordat de nieuwe techniek ook daadwerkelijk toegepast kan worden.

In dit boekje beschrijft wetenschapsjournalist Bennie Mols de bevindingen van de Studiegroep. Hij heeft daarvoor gesproken met mensen uit de bedrijven die de problemen aangedragen hebben, maar ook met deelnemers die aan de problemen gewerkt hebben. De lezer zal merken dat in veel gevallen concrete oplossingen gevonden zijn, en dat in andere gevallen in ieder geval een oplossingsrichting geformuleerd is. Wie meer gedetailleerde informatie over het verrichte werk wil hebben, kan die vinden in de wetenschappelijke proceedings van de Studiegroep, die in een apart boekwerk uitgegeven zijn.

Als organisatie danken we iedereen die aan de succesvolle week heeft bijgedragen. STW en NWO hebben als hoofdsponsors het grootste deel van de financiering op zich genomen. Daarnaast droegen ook de Twentse wetenschappelijke instituten CTIT en IMPACT ruimhartig bij in de kosten, en het CWI heeft een belangrijk gedeelte van de drukkosten betaald.

Maar bovenal bedanken we de deelnemende bedrijven en wiskundigen voor een geweldige week waarin het nut van de wiskunde weer eens uitermate zichtbaar was.

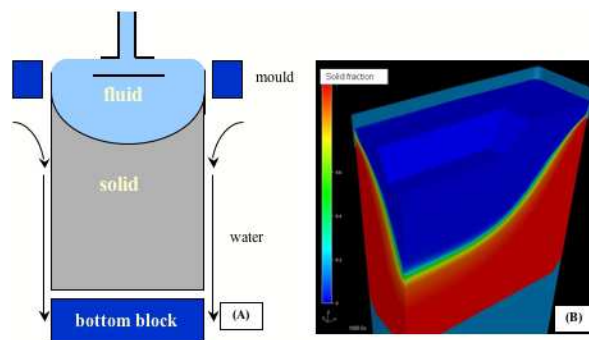
De organisatiecommissie SWI 2008:
Onno Bokhove, Diana Dalenoord, Dini Heres-Ticheler,
Johann Hurink, Gjerrit Meinsma, Marielle Plekenpol,
Chris Stolk, Michel Vellekoop

Enschede, November 2008

Hoogwaardige aluminiumlegeringen

Het fabriceren van hoogwaardige aluminiumlegeringen heeft veel weg van alchemie uit vervlogen eeuwen. Exact berekenen wat er chemisch gebeurt tijdens het afkoelen, kost tot nu toe te veel rekentijd. Een slimme wiskundige aanpak kan deze alchemie terugbrengen naar deze eeuw en nauwkeurige voorspellingen leveren gebaseerd op moderne natuurkunde en chemie.

Onderdelen van auto's, vliegtuigen en een heleboel andere producten zijn gemaakt van een hoogwaardige aluminiumlegering. Het materiaal moet de gewenste sterkte, stijfheid en gladheid hebben. Om het deze eigenschappen te geven, worden allerlei chemische elementen toegevoegd aan het zuivere aluminium: bijvoorbeeld koper, zink, silicium, mangaan en magnesium. Afhankelijk van de toepassing variëren de gewichtsfracties van deze elementen tussen eentiende en tien procent.

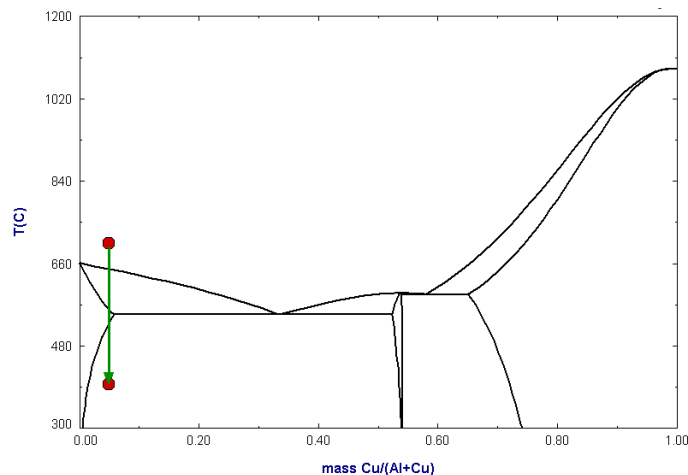


Figuur 1: Links: schema van het aluminium gietproces. Rechts: numerieke simulatie van het aluminium gietproces in een kwart van de gietvorm. Blauw is vloeibaar aluminium en rood is vast aluminium.

Bij het staalbedrijf Corus wordt onderzoek gedaan naar het productieproces van deze hoogwaardige producten. Dat proces begint met het gieten van een vloeibare aluminiumlegering in een cilindrische vorm. Aan de zijkanten wordt de vorm met water gekoeld. De bodem van de vorm staat op een lift die naar beneden zakt tijdens het gietproces. Aan de bovenkant wordt voortdurend vloeibaar aluminium bijgegoten (figuur 1). De aluminiumlegering stolt van buiten naar binnen en van beneden naar boven. Uiteindelijk komt er aan de onderkant van de vorm een vaste aluminiumstaaf of -blok uit die meer dan zes meter lang, tot een halve meter dik en, voor de plakken, tot wel twee meter breed kan zijn.

Zuiver aluminium stolt bij 660 graden Celsius. Als je er vijf gewichtsprocent koper aan toevoegt, daalt het stolpunt naar 650 graden Celsius. Het gedrag van de legering wordt aan de ene kant bepaald door het verloop van de afkoeling, maar aan de andere kant ook door de stroming van de legering door de gietvorm. Als gevolg van de stroming en het stolproces kan er bijvoorbeeld relatief veel koper in het midden terecht komen. Het gevolg is een hoger stolpunt in het midden dan aan de zijkanten. Dat leidt er toe dat het eindproduct in het midden andere eigenschappen krijgt dan aan de buitenkant. Idealiter wil Corus juist een eindproduct dat overal dezelfde eigenschappen heeft.

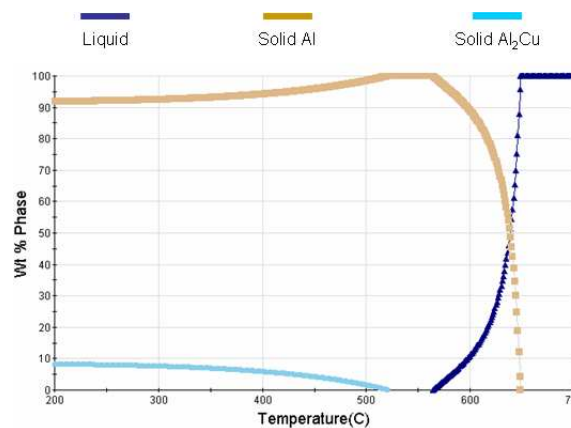
“We willen begrijpen hoe dit soort inhomogeniteiten ontstaat”, zegt Andreas ten Cate van Corus. “Als we dat begrijpen, dan is de volgende stap dat we het productieproces kunnen aanpassen om inhomogeniteiten in het eindproduct te voorkomen.”



Figuur 2: Fasediagram dat de relatie geeft tussen de samenstelling van de aluminium-koperlegering en de temperatuur.

Stolling en stroming Samen met andere aluminiumbedrijven ontwikkelt Corus software om het gietproces op de computer te simuleren (figuur 1). Dat is gemakkelijker gezegd dan gedaan. Op elk punt in de gietvorm moet je in de tijd berekenen welke elementen er in welke concentratie zitten en waar ze heen stromen. Bij het stollen kan op iedere plek de concentratie van elementen veranderen, omdat niet evenveel van een element vanuit de vloeistof in het vaste materiaal wil gaan zitten. De stroming zorgt er vervolgens voor dat de elementen zich verplaatsen. Het gevolg daarvan is dat op iedere plek ook de stolling steeds anders kan gaan verlopen.

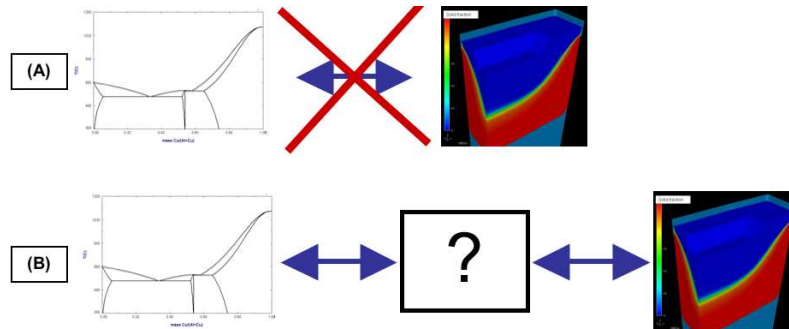
Juist de aanwezigheid van een verscheidenheid aan extra elementen in de aluminiumlegering compliceert het probleem sterk. Elk extra element leidt tot een extra dimensie in de meerdimensionale thermodynamische faseruimte (figuur 2). Om te voorkomen dat op elk tijdstip en op elk punt de fasetoestand moet worden berekend bij een specifieke temperatuur en een specifieke combinatie van elementen, lijkt het daarom handig om gebruik te maken van een thermodynamisch databestand. Daarin staat voor een heleboel temperaturen en concentraties wat de fasetoestand is. De database is netjes van te voren berekend. In plaats van het telkens opnieuw berekenen van de fasetoestand, hoeft het computerprogramma de fasetoestand alleen maar in een tabel op te zoeken. Omdat de database alleen een discrete voorstelling van de werkelijkheid levert, is in de praktijk interpolatie nodig om de fasetoestand voor een willekeurige combinatie van temperatuur en concentraties te kennen. Maar dat werkt nog steeds sneller dan het telkens opnieuw berekenen van de fasetoestand.



Figuur 3: Fasevorming tijdens het stolproces van aluminium met 4,5 gewichtsprocent koper (ook aangegeven met de groene lijn in figuur 2).

Toch is zo'n rechttoe-rechtaan-database niet automatisch de oplossing. Probleem is dat de grootte van dit gegevensbestand snel uit de hand loopt bij een toenemend aantal elementen in het vloeibare aluminium. Bij vier elementen beslaat de database al snel duizend gigabyte. Bij vijf of zes elementen wordt de database onwerkbaar groot.

Ten Cate: “Als we het probleem terugbrengen tot twee dimensies, duurt een simulatie al drie uur. Als we het tijdafhankelijke, driedimensionale probleem willen oplossen, duurt één enkele simulatie al langer dan twee weken. De uitdaging die we aan de studiegroep wiskunde met de industrie hebben gegeven was om een efficiënte koppeling te zoeken tussen de thermodynamische database en het simulatiemodel.”



Figuur 4: Een directe koppeling tussen thermodynamicasoftware en de simulatie kost te veel rekentijd. De uitdaging van het Corus-probleem is om een efficiënte koppeling te bedenken tussen de simulatie en de thermodynamische database.

Sprongpunten De wiskundigen van de studiegroep hebben eerst een eenvoudig eendimensionaal model van het fysische probleem gemaakt. Ondanks de beperking tot één dimensie, geeft dit model nog steeds een realistische beschrijving van het stollingsproces. Het model bestaat uit een verzameling partiële differentiaalvergelijkingen die het karakter hebben van convectie-diffusievergelijkingen met brontermen. Het model is zo ontworpen dat het gebruik kan maken van een thermodynamische database.

De volgende stap is dan om te proberen de thermodynamische database in grootte te beperken zonder dat de uiteindelijke oplossing significant afwijkt van de realiteit. “Daarvoor hebben we een wonderlijk eenvoudig idee uitgewerkt”, zegt professor Bernard Geurts van de Universiteit Twente en lid van de studiegroep die de uitdaging van Corus bestudeerde. “Het thermodynamische gedrag in de faseruimte wordt gekenmerkt door een heleboel sprongpunten. Als we weten waar de sprongpunten zitten, kunnen we de enorme thermodynamische database die aan elk roosterpunt hangt, veel goedkoper representeren. We maken gebruik van de wetenschap dat het gedrag tussen de sprongpunten ofwel lineair ofwel kwadratisch verloopt. Dan kunnen we polynomiale fitting toepassen. Zo hebben we de database met een factor achthonderd gereduceerd, van 1000 gigabyte naar 1,25 gigabyte en dan is de simulatie wel te doen. Zo hebben we laten zien dat de berekening wél goed is uit te voeren, terwijl we maar een klein beetje aan nauwkeurigheid verliezen.”

De partiële differentiaalvergelijkingen kunnen met commercieel verkrijgbare software numeriek worden opgelost. Het moeilijkste van het Corus-probleem zit in de datareductie, niet in het oplossen van de uiteindelijke vergelijkingen.

Behalve deze concrete verbetering, heeft de studiegroep nog andere suggesties gedaan, die echter nog niet in detail zijn uitgewerkt. Deze sugges-

ties bieden kansen op verdere verbeteringen als Corus de mogelijkheid heeft deze stappen verder uit te werken. Allereerst zou je een onderscheid kunnen maken tussen grootheden die langzaam veranderen als functie van temperatuur en samenstelling van de legering, en grootheden die snel veranderen. Ten tweede kun je belangrijkere gebieden in het fase-diagram ook met een hogere nauwkeurigheid representeren dan gebieden die in de praktijk minder belangrijk zijn.

“Het probleem is te zwaar om binnen een week met direct toepasbare resultaten te komen”, zegt Geurts. “Maar met het model dat er nu ligt, zou Corus ideeën voor het maken van betere legeringen makkelijk kunnen testen. De reductie van de database die we hebben voorgesteld, kunnen ze ook direct toepassen in hun simulatiesoftware. De bal ligt nu bij Corus. Zij moeten bekijken of en hoe ze onze resultaten willen toepassen.”

Homogeen eindproduct Andreas ten Cate van Corus is tevreden met de resultaten. “De studiegroep is heel concreet bezig geweest, en dat terwijl we de wiskundigen niet directe toegang tot de broncode van onze software konden geven. Ik kon ze wel een modelbeschrijving geven, en op basis daarvan hebben ze hun eigen model gemaakt. De concrete resultaten die ze voorstellen, maken volgens mij een goede kans om geïmplementeerd te worden. Het was nieuw voor mij om te zien dat je met een semi-analytische beschrijving van de curves in het fase-diagram veel sneller resultaten behaalt. Ook de andere gesuggereerde verbeteringen zien er goed uit.”

Gaat Corus de resultaten dan ook in de eigen simulatiesoftware gebruiken? Ten Cate: “Omdat de softwareontwikkeling binnen een internationaal consortium gebeurt, weet ik niet zeker of, en zo ja, hoe het wordt opgepikt, maar ik ga de suggesties van de studiegroep zeker inbrengen. Dan is het vervolgens aan het consortium om te beslissen wat ze ermee willen doen. Volgens mij is er een goede kans dat de resultaten geïmplementeerd gaan worden.”

De mensen in de fabriek zijn al blij als er een heel blok aluminiumlegering uit het productieproces komt. Het is mooi meegenomen als de eigenschappen dan ook nog homogeen zijn, maar dat gebeurt niet altijd en soms verliest het eindproduct veel van zijn waarde. Ten Cate: “Nu wordt geprobeerd om nieuwe legeringen te ontwikkelen die het negatieve gevolg van de inhomogene samenstelling compenseren. Als we echter de interactie tussen de chemie en de fysica van het stollingsproces tijdens het gieten begrijpen en beheersen, dan kunnen we met dezelfde legering een beter product aanbieden. Dan weten we namelijk hoe we inhomogeniteiten kunnen voorkomen.”

Micro-elektromechanische schakelaars voor mobiele telefoons

Voor de toepassing van micro-elektromechanische schakelaars in mobiele telefoons staan de ontwikkelaars voor een wiskundig probleem: hoe vind je in een groot landschap van mogelijke oplossingen de stabiele evenwichtsoptimalisaties van een bewegende plaatcondensator? Ten tijde van SWI2008, eind januari 2008, werd dit probleem ingebracht door het bedrijf NXP Semiconductors. Later in 2008 nam het bedrijf Epcos AG de RF-MEMS activiteiten van NXP Semiconductors over¹. Maar ook na de overname werken NXP en Epcos nog samen op het gebied van RF MEMS-schakelaars.

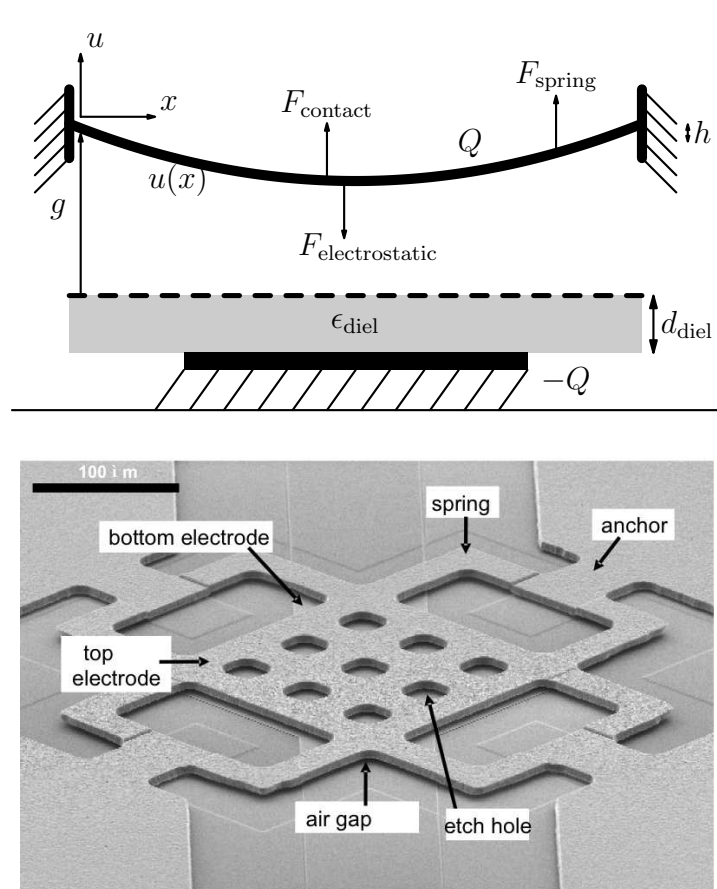
De meest voorkomende schakelaar in elektronische circuits is de transistor. Hij is klein, snel schakelbaar en goedkoop. Toch heeft een transistor ook nadelen. Juist omdat hij van halfgeleidermateriaal is gemaakt, treden er hogere vermogensverliezen op dan bij een elektromechanische schakelaar, die alleen maar goede elektrische geleiders gebruikt.

De elektromechanische schakelaar kent een lange traditie. Samuel Morse gebruikte er voor het eerst eentje in 1844, toen hij het eerste telegraafbericht van Washington DC naar Baltimore verstuurde. Door het gebruik van transistors sinds de tweede helft van de twintigste eeuw, is de elektromechanische schakelaar lange tijd uit beeld verdwenen geweest. Inmiddels bestaat er echter een hernieuwde belangstelling. Zo werken de bedrijven Epcos Nederland en NXP Semiconductors samen aan een moderne miniaturversie van de elektromechanische schakelaar, speciaal bedoeld voor het schakelen van radiofrequente (RF) signalen in mobiele telefoons: een micro-elektromechanische schakelaar, of RF MEMS.

Een RF MEMS biedt twee belangrijke voordelen. “De antenneverstand van een mobiele telefoon wordt sterk beïnvloed door externe factoren, zoals hoe je je hand en je hoofd ten opzichte van de antenne houdt”, vertelt Jiri Stulemeijer van de ontwikkelingsafdeling van Epcos. “Hierdoor kan een groot deel van het vermogen dat uit de versterker komt reflecteren en komt het niet bij de antenne. Daardoor gaat de batterij van de telefoon sneller leeg. Met een adaptief netwerk, dat gebruik maakt van MEMS-schakelaars, willen we continu een optimale instelling creëren, zodat er geen signaalvermogen verloren gaat en de batterij langer meegaat.”

¹zie het persbericht <http://www.epcos.com/web/generator/Web/Sections/Press/DailyandBusinessPress/PressReleases2008/EPCOS/Page1,locale=en.html>

Het tweede voordeel zit in de multifunctionaliteit van een MEMS-schakelaar. Stulemeijer: “Nu gebruikt een mobieltje voor iedere frequentieband een andere versterker: voor GSM, UMTS, WLAN, Bluetooth, enzovoort. Met een MEMS kun je één schakelbare versterker bouwen voor alle frequentiebanden. Hierdoor verminder je het aantal componenten in de telefoon, terwijl je er tevens voor zorgt dat de versterker altijd efficiënt gebruikt wordt. Ook dit tweede voordeel van een MEMS-schakelaar verlengt de levensduur van de batterij.”



Figuur 5: (a) Schematische doorsnede van een capacitieve RF MEMS schakelaar. (b) Opname van een capacitieve RF MEMS schakelaar gemaakt met een scanning elektronen microscoop.

Krachtenspel Een MEMS is in feite een condensator bestaande uit twee vierkante plaatjes. Elk plaatje heeft zijden van slechts enkele tienden van een millimeter. Het onderste plaatje zit vast, en het bovenste plaatje kan bewegen. Wanneer een elektrische spanning over de twee plaatjes wordt

aangebracht, beweegt het bovenste plaatje naar het onderste. Als gevolg daarvan, buigt het bovenste plaatje als een veer door. De krachten op het bovenste plaatje hangen af van de aangelegde spanning en zijn positie. Bij een bepaalde spanning zijn er in principe meerdere evenwichtstoestanden mogelijk.

Maar behalve de veerkracht en de elektrostatische kracht, spelen nog twee andere krachten een rol. Als de schakelaar dicht staat, dan raakt de bovenste elektrode een isolerende laag op de onderste. Dat resulteert in een contactkracht, die zich gedraagt als die van een sterk niet-lineaire veer. Verder moet er bij het dichtgaan van de schakelaar lucht uit de spleet tussen de twee elektroden worden geduwd. Daarvoor is ook een kracht nodig: de luchtspleetdempingskracht.

“Wat we nu willen weten,” zegt projectleider Peter Steeneken van het RF MEMS-onderzoek bij NXP Semiconductors, “is de verplaatsing van de bovenste plaat, waarbij op elk punt de elektrostatische kracht die het plaatje naar beneden trekt in evenwicht is met de veerkracht die het plaatje terug naar boven trekt. Bovendien willen we weten of het bereikte evenwicht stabiel of instabiel is. Sommige evenwichten zijn namelijk instabiel: als je er een klein zetje aan zou geven, dan raakt het plaatje uit zijn evenwicht. In de praktijk kan een MEMS alleen maar stabiele evenwichtstoestanden aannemen.”

Energiefunctionaal Bob Planqué van de Vrije Universiteit in Amsterdam was een van de wiskundigen uit de studiegroep die het MEMS-probleem heeft bestudeerd. “Omdat het fysische probleem al helemaal gemodelleerd was, konden wij meteen aan de slag met het wiskundige probleem”, vertelt de wiskundige over het werk tijdens de studieweek.

Als uitgangspunt werd de energiefunctionaal gekozen: de functie die aangeeft hoe de energie afhangt van de variabelen in het MEMS-probleem, met name de afstand tussen de platen, de diëlektrische eigenschappen van de platen en de spanning over de condensator. Grafisch voorgesteld, is de energiefunctioneel een heuvelandschap waarin de hoogte de energie voorstelt en de andere dimensies de variabelen in de energiefunctionaal. Planqué: “De vraag is dan welke punten in het landschap een lokale minimale energie hebben. Dat zijn de stabiele evenwichten. De complicatie hierbij is, dat wat in de ene richting een minimum lijkt, in de andere richting een maximum kan lijken. Om de lokale minima te vinden moet niet alleen de eerste afgeleide van de energie in alle richtingen nul zijn, maar moet ook de tweede afgeleide in alle richtingen positief zijn.”

Een bewijs van instabiliteit is vaak makkelijker dan van stabiliteit: voor het eerste hoef je maar één onstabiele richting te vinden, in het tweede

geval moet je laten zien dat er geen instabiele richtingen zijn. Planqué: “Deze methode hebben we ook gebruikt om te laten zien dat een deel van de gevonden evenwichtoplossingen instabiel is. We konden in dat geval een goedgekozen richting vinden waarin de tweede afgeleide van de functionaal afnam.”

Twee factoren compliceren het vinden van lokale minima. Allereerst komt de mechanische energie als een vierde-orde term voor: een afgeleide in het kwadraat. Dat is vervelend. Ten tweede zijn de elektrostatische en de contactenergie niet-lineair. Voor het minimaliseren van functionalen met niet-lineaire termen, bestaat geen algemene oplossingsmethode. Planqué: “In deze aanpak maken we rijtjes functies met steeds lagere energie, en hopen dat dat rijtje convergeert naar een daadwerkelijk minimum. Dit is moeilijk voor convex-concave functionalen zoals hier.”

Lineariseren Als je alleen maar naar hele kleine uitwijkingen ten opzichte van een ruststand kijkt, dan mag je het probleem lineariseren en alle hogere orde niet-lineaire termen schrappen. Planqué: “Deze lineaire vergelijking kunnen we zelfs analytisch oplossen, zodat we al het nodige kunnen leren uit de structuur van de evenwichtoplossingen.”

Door de linearisering kan echter niet het hele fysische probleem worden beschreven. Het hysterese gedrag van een MEMS-schakelaar – waarbij het gedrag op een bepaald moment afhankelijk is van de voorgeschiedenis – is een uitvloeisel van de niet-lineariteit van het probleem, terwijl het niet volgt uit het lineaire probleem. Verder konden de wiskundigen laten zien dat de numerieke methode die Epcos zelf al had ontwikkeld, de standaard wiskundige methode is om dit soort problemen op te lossen. De onderzoekers van Epcos en NXP pasten de methode toe zonder te weten dat hij in de literatuur al bestond.

De studiegroep heeft ten slotte ook nog een aantal eigenschappen bewezen van het contactprobleem: het probleem dat ontstaat wanneer de bovenste condensatorplaat de onderste raakt. Planqué: “Als de elektrische spanning langzaam wordt verhoogd, raakt de bovenste plaat de onderste eerst in één punt. Wij hebben wiskundig bewezen dat als je de spanning nog wat verder opvoert er in eerste instantie toch maar één contactpunt blijft. Pas na een tijdje, als de spanning nog verder toeneemt, ontstaat er een contactoppervlak. Dit fenomeen was nieuw voor Epcos en NXP.”

Commercieel product “Voor ons heeft de studiegroep twee belangrijke resultaten opgeleverd”, vertelt Jiri Stulemeijer van Epcos. “Ten eerste heeft de studiegroep ons geholpen met het benoemen van een oplossingsmethode die we in feite zelf al hadden gevonden. Daarmee hebben ze ons

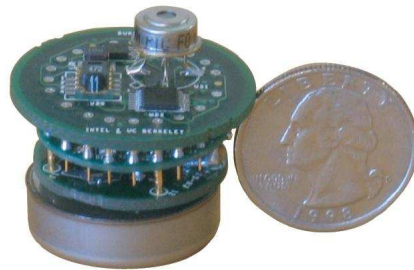
ook extra achtergronden bij die methode geleverd. Ten tweede heeft de studiegroep aan de hand van een paar voorbeelden laten zien hoe je de stabiliteit van de MEMS analytisch kunt bepalen. Dat helpt ons om complexere toestanden van de MEMS beter te interpreteren. Waarom is een bepaalde oplossing stabiel of instabiel? Dat zie je beter aan de analytische oplossing dan aan de numerieke oplossing. Verder weten we nu ook dat sommige problemen in het algemeen niet oplosbaar zijn, en ook dat is handig om te weten.”

In de praktijk van het MEMS-onderzoek bij Epcos en NXP loopt het modelleren parallel aan het experimenteren in de cleanroom van het bedrijf. Wat de onderzoekers in de modellen zien, vinden ze ook terug in de metingen. Momenteel wordt dit soort MEMS nog niet gebruikt in mobiele telefoons. Voordat ze daadwerkelijk in mobiele telefoons toegepast kunnen worden, moet eerst aangetoond worden dat ze betrouwbaar genoeg zijn en jarenlang kunnen meegaan. “We hebben al veel testen uitgevoerd en verwachten de eerste commerciële producten in de nabije toekomst”, aldus Stulemeijer, “De fabrikanten van mobiele telefoons zijn enthousiast en we verwachten dan ook een goede toekomst voor deze technologie.”

Sensornetwerk controleert omgeving

*Wiskunde repareert imperfectie van een sensornetwerk
en spoort zo indringers op.*

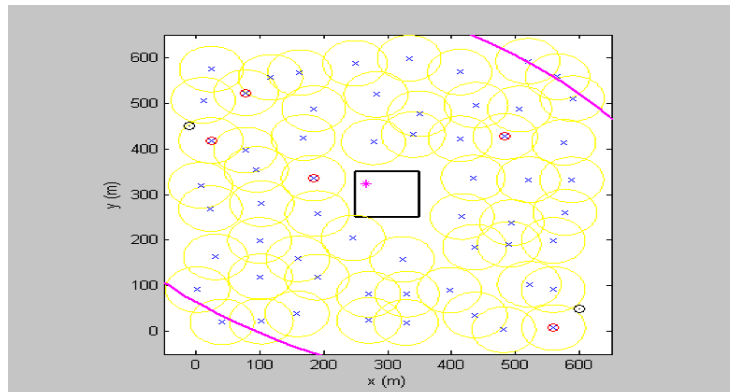
Een draadloos sensornetwerk kan gebruikt worden om een omgeving in de gaten te houden, bijvoorbeeld voor de beveiliging van een gebouw of een bedrijventerrein. Het idee is dat een netwerk van tientallen tot duizenden sensoren aan een centrale doorgeeft waar een of meerdere objecten zich op een bepaald moment bevinden en hoe ze vervolgens door de omgeving bewegen.



Figuur 6: Een sensor die in een draadloos sensornetwerk gebruikt kan worden.

De sensoren kunnen klein en goedkoop zijn. Ze geven alleen maar door of er zich wel of niet een object bevindt binnen een cirkelvormig gebied rond de sensor. Afhankelijk van de beoogde toepassing, kan de detectietechnologie van een enkele sensor gebaseerd zijn op radarstraling, microgolfstraling, infrarode straling, maar ook op ultrasone geluidsgolven of seismische activiteit.

Het bedrijf Thales onderzoekt of zo'n sensornetwerk praktisch realiseerbaar is. Een van de onderwerpen is het reconstrueren van het pad dat het indringende object volgt. Op grond van de signalen van de individuele sensoren die centraal binnenkomen, moet immers een pad worden bepaald van hoe het object beweegt in de omgeving van het netwerk. De padbepaling wordt echter bemoeilijkt door het feit dat sensoren niet perfect werken. Soms geeft een sensor het signaal dat er een object in zijn nabijheid is, terwijl er niets zit: vals alarm dus. Aan de andere kant kan een sensor ook een object in zijn nabijheid over het hoofd zien: een gemiste detectie.



Figuur 7: Sensornetwerk in een gebied van 650 bij 650 meter.

Yvo Boers van Thales vertelt welke problemen dit voor de interpretatie van het sensornetwerk betekent: “Wij hebben een netwerk met honderden sensoren gesimuleerd. Als we aannemen dat de vals-alarmkans 2% is, en de detectiekans 95%, dan laat onze simulatie zien dat je niet op het oog in staat bent om op grond van alle sensormetingen te bepalen hoe het object in het netwerk beweegt en zelfs niet of er een object aanwezig is. Voor de praktijk is de imperfectie van de sensoren dus echt een probleem.”

Maar in plaats van het gebruiken van kwalitatief betere, en dus ook duurere sensoren, is een andere, en waarschijnlijk goedkopere aanpak om met slimme wiskunde het probleem te verhelpen. De belangrijkste doelstelling daarbij is dat de detectiekans maximaal moet zijn, en de vals-alarmkans minimaal.

Een deels open probleem voor Thales is hoe je moet beslissen of er wel of niet een object in de buurt van een sensor zit, gegeven een bepaalde detectiekans en een bepaalde vals-alarmkans. Die vraag legde Thales voor aan de studiegroep wiskunde met de industrie. Een tweede vraag waar het bedrijf graag antwoord op wil, is wat de beste manier is om de sensoren in een gebied neer te leggen.

Hexagonale plaatsing Elke sensor bewaakt bij benadering een cirkelvormig gebied met een straal r om zich heen. Plaatsing van sensoren in een groot gebied komt dan neer op het plaatsen van een heleboel cirkels met eenzelfde straal in een plat vlak. De cirkels kunnen elkaar al dan niet overlappen. In de gebieden waar de cirkels elkaar overlappen, is de detectiekans groter, omdat niet één, maar twee of zelfs meer sensoren hetzelfde object kunnen opmerken, wanneer het zich in het gebied van de overlap bevindt.

De studiegroep gebruikte zowel een één- als een tweedimensionaal model voor het onderzoeken wat de beste manier is om sensoren in een gebied te plaatsen. Nelly Litvak van de Universiteit Twente was een van de wiskundigen die het probleem bestudeerde. Zij vertelt: “De belangrijkste conclusie uit beide modellen is dat het alleen zin heeft om de sensoren te laten overlappen wanneer de waarschijnlijkheid om het object op een bepaalde plaats te vinden sterk varieert als functie de plaats. We konden ook een vuistregel afleiden voor hoe onregelmatig deze functie moet zijn voordat het zinvol is om sensoren te laten overlappen.”

Wanneer de a priori kans om een object op een bepaalde plaats te vinden overal even groot is, dan is de optimale plaatsing van de sensoren exact bekend. Litvak: “De optimale plaatsing is dan die van cirkels neergelegd op een hexagonaal grid; dat is een grid bestaande uit zeshoeken. Elke zeshoek heeft zijden met lengten van twee maal de straal van de cirkel. Als je de sensoren precies op de hoekpunten van de zeshoeken plaatst, wordt de ruimte maximaal opgevuld en is de overlap minimaal, namelijk nul.”

Reconstructie Voor het probleem van de objectdetectie gebruikten de wiskundigen allereerste twee statistische methoden: hypothesetesting en een Bayesiaanse aanpak. Hypothesetesting laat zien dat, als sensoren elkaar niet overlappen, het eenmalig aflezen van een enkele sensor niet genoeg is om een object efficiënt op te sporen. Dat kan worden opgelost door ofwel sensoren wel te laten overlappen, ofwel door meerdere waarnemingen achter elkaar te gebruiken.

In de Bayesiaanse aanpak gaan de wiskundigen uit van niet-overlappende sensoren. Deze aanpak drukt de kans dat een object in het sensorbereik zit uit in termen van de a priori waarschijnlijkheid dat het object in het gebied aanwezig is, de detectiekans, de vals-alarmkans en het aantal aanwezige sensoren. Deze aanpak kan in principe ook worden gebruikt voor opeenvolgende sensoraflezingen. De a posteriori waarschijnlijkheid kan dan in een volgende afleesstap als nieuwe a priori waarschijnlijkheid worden gebruikt.

Ten tweede gebruikten de wiskundigen een nieuwe methode voor opeenvolgende observaties van de sensoren: een zogeheten hidden Markov model. Dit is gebaseerd op een stochastisch proces dat een combinatie is van een Markovketen waaraan ruis wordt toegevoegd. De ruis is het gevolg van het feit dat de sensoren niet perfect zijn, en zowel een gemiste-detectie-als een vals-alarmkans hebben. Waar in een gewoon Markov-model de volgende toestand in het model alleen afhangt van de vorige, hangt in een hidden Markov model de huidige toestand af van de hele voorgeschiedenis.

Deze methode kan gebruikt worden om uit een lange reeks van actuele observaties van individuele sensoren – voor te stellen als een rij nullen (geen object aanwezig) en enen (object aanwezig) – terug te rekenen wat de meest waarschijnlijke reeks van ‘ware’ detecties moet zijn. Stel dat een enkele sensor op opeenvolgende afleestijdstoppen de reeks 000111011000 geeft, dan is het waarschijnlijk dat de ‘ware’ reeks moet zijn: 000111111000. Als de sensor steeds een object detecteert, opeens een keer niet, en daarna weer wel, dan is er waarschijnlijk een gemiste detectie geweest. Aan de andere kant is de kans groot dat de waargenomen reeks 0001000 eigenlijk alleen maar uit nullen moet bestaan, omdat die ene detectie geheel uit de toon valt. Het bestaande Viterbi-algoritme, gebaseerd op dynamisch programmeren, lost dit reconstructieprobleem op voor een algemeen geval.

Litvak: “Voor het eenvoudige voorbeeld van een enkele sensor hebben we deze methode uitgewerkt. Voor gecompliceerdere gevallen met meerdere sensoren hebben we aangegeven hoe het probleem dan in principe opgelost kan worden. Omdat het aantal berekeningen exponentieel toeneemt met het aantal sensoren, hebben we ook een slimme methode bedacht om het aantal berekeningen toch te beperken. Het voordeel van deze methode is dat je in principe vooraf – en dus offline – al kunt berekenen welke waarnemingspatronen vertellen dat er een object is, en welke niet.”

Ten slotte hebben de wiskundigen een numerieke simulatie ontwikkeld die gebaseerd is op zowel het handig plaatsen van sensoren, als het bepalen of een detectie goed of fout is. Een combinatie dus van allebei de bestudeerde problemen. In de praktijk van een sensornetwerk moeten beide problemen namelijk tegelijk opgelost worden, zo was de filosofie van de studiegroep. Waar mogelijk, zijn de simulatieresultaten vergeleken met de eerder verkregen analytische resultaten voor eenvoudige gevallen. Litvak: “De resultaten laten zien dat we voor een efficiënt sensornetwerk onze oplossingen voor allebei de problemen succesvol kunnen combineren. Bovendien kan de methode in principe ook worden gebruikt om een object te volgen in het gebied van het sensornetwerk, en dat is toch het ultieme doel van Thales.”

Onverwachte oplossingen “De studiegroep heeft veel gedaan in een week”, reageert Yvo Boers van Thales op de resultaten van de studiegroep. “Vooraf had ik gehoopt dat de week voor ons een aantal onverwachte methoden of inzichten zou kunnen opleveren, en dat is gelukt. Wij zijn er tot nu toe steeds vanuit gegaan dat de plaatsing van de sensoren een gegeven is waar we ofwel helemaal geen controle over hebben, ofwel dat we de sensoren intuïtief neerleggen. De wiskundigen hebben op een

formele manier laten zien hoe de verdeling van de sensoren afhangt van het verwachte gedrag van een object. De studiegroep heeft in wiskundige stellingen gevat wat wij alleen adhoc hadden gedaan.”

“De wiskundigen hebben ook een veelbelovende suggestie gedaan waar we zelf niet aan hadden gedacht”, vervolgt Boers. “De suggestie dat het wel eens handig kan zijn om de sensoren van een klein geheugen te voorzien. Dat geheugen kan bijvoorbeeld de laatste tien waarnemingen opslaan en ze dan eens in de tien tijdstappen in een keer doorgeven aan de centrale. Technisch gezien kan dat. Zeker weten doen we het niet, maar dat zou best een handige aanpak kunnen zijn.” Boers wil met een NWO-Casimirsubsidie die hij heeft gekregen voor een studie naar sensornetwerken specifiek deze suggestie verder onderzoeken.

Boers verwacht trouwens niet dat een draadloos sensornetwerk al op korte termijn praktijk wordt. Daarvoor moet er nog wel wat extra onderzoek gebeuren. “Maar,” zegt hij, “we weten dat er vraag naar bestaat, en ook andere bedrijven werken aan dit soort netwerken.”

Klaar voor vertrek

Hoe zet je treinstellen 's nachts handig op rangeersporen neer, zodat 's morgens alle treinen weer op tijd kunnen vertrekken?

Dagelijks vervoeren de Nederlandse Spoorwegen (NS) gemiddeld 1,1 miljoen reizigers. Dat gebeurt in 4.500 treinritten over één van de drukst bereiden spoornetwerken van Europa. Daarnaast beheert de NS alle 377 stations in Nederland. Hoeveel treinen en treinstellen er op een bepaald moment van de dag nodig zijn, varieert sterk. Tijdens de spitsuren wordt vrijwel al het materieel gebruikt. In de daluren is dat veel minder, en 's nachts rijden nauwelijks treinen. De niet gebruikte treinstellen moeten 's nachts en tijdens de daluren geparkeerd worden op rangeerterreinen.

Het rangeren van treinstellen op diverse rangeersporen gebeurt niet willekeurig. De NS wil er namelijk voor zorgen dat het, zodra het de treinstellen weer nodig heeft, zo min mogelijk tijd kwijt is met het ophalen van de treinstellen. Je wilt niet eerst zes treinstellen van een rangeerspoor moeten weghalen omdat je een zevende nodig hebt, dat dan toevallig achteraan blijkt te staan. Hoe zet je treinstellen zo efficiënt mogelijk op een serie rangeersporen neer, gegeven de NS-dienstregeling en gegeven het aantal perrons en rangeersporen van een station. Dat is de vraag die de NS aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie voorlegde.

“Nu gebeurt de rangeerplanning nog volledig handmatig, aan de hand van een grafisch planbord”, vertelt Leo Kroon, als onderzoeker werkzaam bij NS Reizigers, en daarnaast hoogleraar kwantitatieve logistiek aan de Erasmus Universiteit in Rotterdam. “Ik schat dat er zo'n honderd mensen bij de NS-rangeerplanning betrokken zijn, verdeeld over verschillende locaties. In de toekomst willen we de planners ondersteunen met een wiskundig model. Maar omdat er altijd praktische details zijn die niet in de modellen meegenomen kunnen worden, zullen de planners de oplossingen van het model in de praktijk moeten bijslijpen.”

Het aantal benodigde rangeerbewegingen varieert per station. Op grote stations, zoals Utrecht, en belangrijke knooppunten, zoals Zwolle, kan het om vijftig tot zelfs een paar honderd rangeerbewegingen per dag gaan.

Samen met een NS-collega en met Lex Schrijver van het CWI heeft Kroon het rangeerprobleem zelf ook al wiskundig aangepakt. “Ons model is gebaseerd op geheeltallig Lineair Programmeren”, zegt Kroon. “Op een aantal rangeerlocaties wordt het ook al met succes toegepast. Maar het model kent twee nadelen. De rekentijd loopt snel uit de hand, en sommige details zijn lastig mee te nemen, terwijl we ze wel zouden willen



meenemen. Wij gaan er bijvoorbeeld vanuit dat het rangeren van een treinstel meteen gebeurt nadat een trein op een station is aangekomen en voorlopig niet meer gebruikt gaat worden. Maar soms is het handiger om een treinstel even te laten wachten, zodat je een ander treinstel dat later binnenkomt eerder weg kunt rangeren, bijvoorbeeld als het tweede treinstel pas later nodig is voor vertrek en dus beter achteraan op het rangeerspoor kan staan.”

De specifieke vraag aan de wiskundigen van de studiegroep was dan ook om een alternatieve methode te bedenken, die flexibeler is en die dit soort mogelijkheden wel meeneemt.

Gretig algoritme “Om een gevoel te krijgen voor de rangeerproblematiek, kregen we van de NS de rangeergegevens van Alkmaar, een middelgroot station”, vertelt Marjan van den Akker, wiskundige en universitair docent bij Informatica aan de Universiteit Utrecht. Zij zat in de studiegroep die het NS-probleem een week lang heeft bestudeerd. “Vervolgens hebben we het probleem generiek aangepakt: voor een willekeurige lay-out van rangeerspooren, en dus voor een willekeurig station.”

Rangeerspooren kunnen van twee kanten toegankelijk zijn, of slechts van één kant. In het laatste geval is het rangeerspoor aan één kant afgesloten door een stootblok. Als één rangeerbeweging telt het voor- of achteruit bewegen van een treinstel.

Het wiskundige probleem komt nu neer op het minimaliseren van het aantal rangeerbewegingen. Voor wiskundigen is dit een zogeheten NP-moeilijk probleem: een probleem waarvan gemakkelijk te testen is of een gegeven oplossing klopt, maar waarvoor nog nooit een snelle methode is gevonden om optimale oplossingen te vinden. NP-moeilijke problemen zijn een klasse van fundamentele wiskundige problemen. Wie er toch in slaagt een snelle methode te vinden om NP-moeilijke problemen op te lossen, kan van het Clay Mathematics Institute een prijs van een miljoen dollar tegemoet zien. Dit instituut stelde in 2000 een lijst van zes fundamentele wiskundige problemen op: millenniumproblemen, die een uitdaging zijn voor de 21e eeuw.

De studiegroep onderzocht twee heuristische oplossingsmethoden. Van den Akker: “De eerste is een greedy algorithm – een gretig algoritme. Dat is een bekend principe om NP-moeilijke problemen op te lossen. Het is een benaderende methode, die via enkele vuistregels op elk moment probeert te doen wat op dat moment het beste lijkt, zonder verder vooruit te kijken. De tweede oplossingsmethode is gebaseerd op dynamisch programmeren. Dit is in principe een exacte methode, die de beste oplossing vindt, maar daar wel veel rekentijd voor nodig heeft.”

grammeren vooruit in de tijd. De methode doorloopt stap voor stap de aankomst- en vertrekbewegingen op het station. Uitgaande van welk materieel er op een bepaald moment een station staat en op welke plek, onthoudt deze methode de efficiëntste serie rangeerbewegingen om deze situatie te bereiken. Telkens als er weer een trein aankomt of vertrekt, bekijkt de methode alle mogelijkheden om te rangeren. Op deze manier wordt voor elke mogelijk nieuwe opstelling van materieel op het station de efficiëntste serie rangeerbewegingen om deze opstelling te bereiken bepaald.

Van den Akker: “Omdat het aantal mogelijkheden snel uit de hand loopt, moeten we dat aantal inperken door extra eisen op te leggen. Bijvoorbeeld dat we maar maximaal drie of vier rangeerbewegingen toestaan. En soms beperkt de symmetrie van het probleem het aantal benodigde rekenoperaties. Voor een relatief klein voorbeeld hebben we de exacte methode getest.”

De twee ontwikkelde methodes benaderen hetzelfde probleem als het ware van twee verschillende kanten. Je kunt de benaderende methode exacter maken. Dat kost dan weer iets meer rekentijd. En je kunt de exacte methode meer heuristisch maken, waarmee je rekentijd wint. Welke van de twee methodes de NS zou willen gebruiken, is een afweging tussen de kosten van de rekentijd en de kwaliteit van de oplossing.

Een andere mogelijkheid is om beide methodes te combineren. Van den Akker: “Je kunt de greedy methode als een soort filter gebruiken voor de exacte methode. In principe rekent de exacte methode alle mogelijke opties door. Maar stel dat hij een optie doorrekent die bij een bepaalde tussenstap al een slechter resultaat scoort dan de oplossing die de greedy methode geeft, dan weet je dat de exacte methode die optie niet nog verder hoeft door te rekenen. Dan stop je met het berekenen van die optie en win je rekentijd.”

Minder rangeerbewegingen “De resultaten van de studiegroep zijn voor ons een eerste aanzet tot een alternatief rangeermodel”, reageert Leo Kroon op het werk van de wiskundigen. “We hebben de voorgestelde methoden nog niet uitgetoetst in de praktijk, maar ik zie wel de toegevoegde waarde. De studiegroep heeft voor een aantal voorbeelden laten zien dat er minder rangeerbewegingen nodig zijn dan ons op geheelallig lineair programmeren gebaseerd model suggereert. Het zijn geconstrueerde voorbeelden, maar toch. Ze geven ons een andere kijk op het rangeerprobleem dan we zelf al hadden.”

Voor de NS is het rangeerprobleem een onderdeel van een veel groter informatiseringsproject. “Alle informatiesystemen die bij de NS-planning

betrokken zijn, moderniseren we momenteel”, vertelt Kroon. “We steken de klassiek gebruikte planborden in een modern, grafisch jasje op de computer. Op termijn willen we die planborden koppelen aan een model voor het rangeerprobleem. Het rangeerprobleem is een van de hardst te kraken noten in ons totale planningsprobleem. Het is veel moeilijker dan te bepalen welke treinstellen we op welke trajecten moeten inzetten en ook moeilijker dan te bepalen op welke trajecten we het personeel het beste kunnen inzetten.”

Watermanagement in een veranderend klimaat

Het Twentse waterschap Regge en Dinkel zoekt naar een oplossing om het door de klimaatverandering verwachte extra regenwater zonder overlast te verwerken.

Naar verwachting leidt klimaatverandering in Nederland tot nattere winters en drogere zomers. Waarschijnlijk valt er in de toekomst meer regen in korte tijd, zowel 's winters als 's zomers. Hoewel nog onzeker is of de totale hoeveelheid regen in een jaar ook toe gaat nemen, wordt er in ieder geval wel een grotere piekbelasting verwacht. De waterschappen in Nederland moeten zich op deze veranderingen instellen.

Het Waterschap Regge en Dinkel is in de regio Twente verantwoordelijk voor het waterbeheer in een gebied van veertig bij veertig kilometer, waarin ook de steden Almelo, Hengelo en Enschede liggen. De twee belangrijkste waterwegen in dit gebied zijn de rivieren Regge en Dinkel. Allebei monden ze uit in de Vecht, die buiten het beheergebied van het waterschap ligt. Maar uiteraard wil het waterschap de problemen niet verplaatsen naar de burens. Dat zou wel gebeuren als al het overtollige water meteen in de Regge en daarna in de Vecht zou uitkomen.

Het Waterschap Regge en Dinkel onderzoekt al een paar jaar hoe het in de toekomst moet omgaan met de verwachte toename van de regenval in korte tijd. “Daarvoor hebben we een hydrologisch simulatiemodel opgesteld”, vertelt Jeroen van der Scheer van het waterschap. “Als invoer van ons model gebruiken we de piekhoeveelheid regen die in tien dagen kan vallen. Het model is gebaseerd op eigenschappen van de bodem en die van het hele watersysteem met sloten, stuwen en rivieren. Het model voorspelt vervolgens hoe de extra waterhoeveelheid wordt afgevoerd en wat de waterpeilen in de regio zijn. Door de voorspellingen van ons model te gebruiken, willen we toekomstige waterproblemen voorkomen.”

Een nadeel van dit simulatiemodel is echter dat het ingewikkeld in elkaar steekt. Het model is zo gedetailleerd dat alle belangrijke waterlopen meegenomen zijn. Bovendien kost het een dag om het simulatiemodel te draaien. Dat betekent ook dat het lastig is om snel inzicht te krijgen in de gevolgen van bepaalde maatregelen: de aanleg van een extra sloot of stuw bijvoorbeeld.

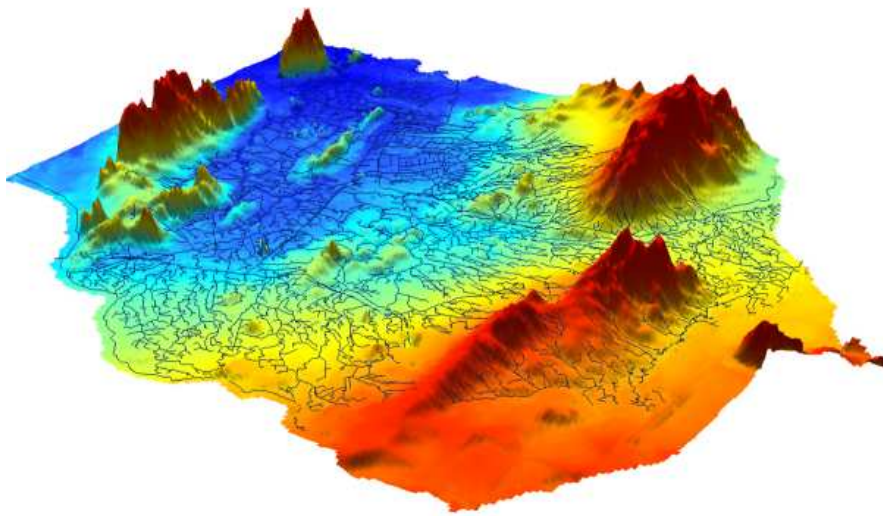
“Met het simulatiemodel hebben we het probleem doorgerekend”, zegt van der Scheer. “Onze conclusie was dat je het totale gebied het beste



Figuur 8: Het beheergebied van het Waterschap Regge en Dinkel.

in een stuk of veertig deelgebieden kunt opdelen, en dan elk deelgebied zijn eigen probleem te laten oplossen door het water tijdelijk vast te houden. Dat is een betere oplossing dan het aanleggen van één groot bassin waarin het water tijdelijk wordt geparkeerd. Maar we vroegen ons af of er geen andere oplossingen waren, en of ons model wel de beste oplossing gaf. Vandaar dat we het probleem hebben voorgelegd aan de studiegroep wiskunde met de industrie.”

Bodemkarakteristiek “Bij sommige fysische problemen heb je te weinig informatie, maar voor het probleem van het waterschap hadden we eigenlijk een overvloed aan informatie”, zegt professor Anton Stoorvogel van de Universiteit Twente, en een van de wiskundigen die zich tijdens de studieweek over het probleem heeft gebogen. “We hebben te maken met duizenden beken en slotjes; en met subgebieden die allemaal een eigen bodemkarakteristiek hebben. Zoveel informatie konden we niet in een week analyseren. Daarom hebben we onderzocht hoe ver we kunnen



Figuur 9: Topografie van het beheergebied Reggen en Dinkel met in blauw de rivieren en sloten.

komen met een veel eenvoudiger model waarin we wel de essentie, maar niet alle details meenemen.”

De studiegroep ontwikkelde twee modellen. Het eerste model is een eendimensionaal fysisch model. Uitgangspunt was het opdelen van het beheergebied in subgebieden met een min of meer uniforme bodemkarakteristiek. Zo houdt kleigrond meer water vast dan zandgrond, en dus moet het model klei- en zandgronden zorgvuldig van elkaar scheiden. Per gebied werd vervolgens de waterafvoer bekeken, waarna de afzonderlijke bijdragen bij elkaar op werden geteld.

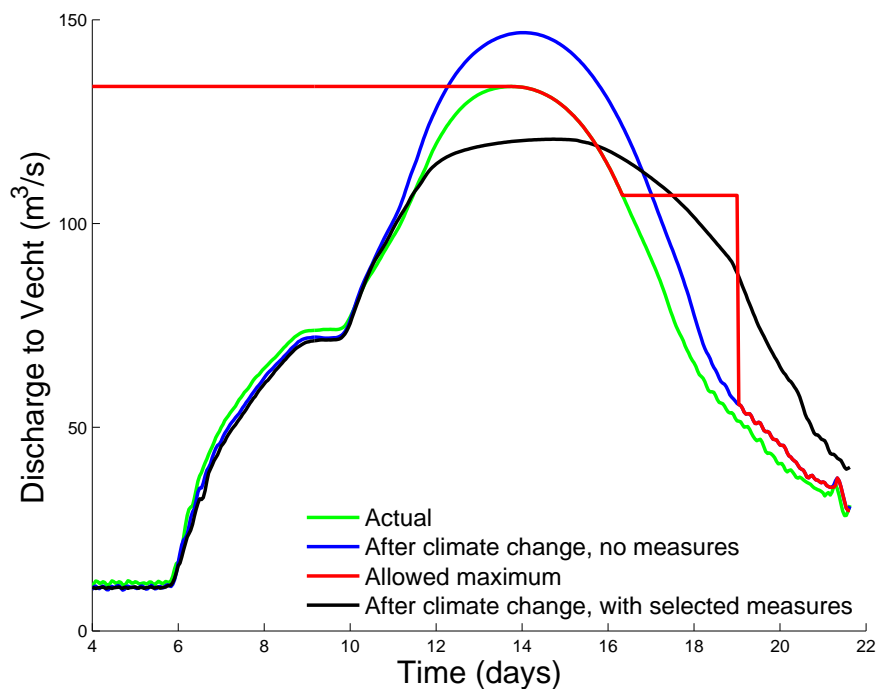
Stoorvogel: “Gegeven de bodemkarakteristieken, hebben we met een eendimensionaal diffusiemodel berekend hoe snel regenwater in de bodem zakt, en hoe snel het via het grondwater in een aangrenzende sloot terecht komt. Van daaruit wordt het water naar de Regge afgevoerd. In ons model hebben we alleen naar de Regge, en niet naar de Dinkel gekeken. Omdat het water ofwel in de ene ofwel in de andere rivier terecht komt, mogen we de afvoeren naar beide rivieren scheiden.”

Voor elk subgebied vonden de wiskundigen zo een fysische vergelijking die vertelt hoeveel water wordt afgevoerd naar de Regge en wanneer het aankomt op het punt waar de Regge in de Vecht uitmondt. Deze vergelijkingen werden numeriek opgelost. De oplossingen laten zien dat zelfs dit eenvoudige model al een realistische beschrijving geeft.

Vervolgens vroegen wiskundigen zich af hoe groot de subgebieden mogen worden, zonder dat de kwaliteit van de oplossingen achteruit zou gaan

omdat het model te grofschalig zou worden. “We begonnen met gebieden van tweehonderd vierkante meter”, zegt Stoorvogel. “Daarna gingen we de gebieden groter maken. Daarmee gingen we gebieden die in detail iets verschillen qua bodemkarakteristiek, toch als een geheel beschouwen. Dat gaat een keer mis, maar we wilden weten hoe lang die aanpak goed gaat. Het bleek goed te gaan tot subgebieden van ongeveer een vierkante kilometer”

De wiskundigen ontwikkelden ook nog een tweede model. Ze vroegen zich af of het probleem niet nog eenvoudiger kan worden gemodelleerd, namelijk met maar één parameter per subgebied. Stoorvogel: “We nemen dan alleen maar aan dat in elk gebiedje een regenhoeveelheid ter grootte ρ wordt afgevoerd, waardoor een hoeveelheid $(1 - \rho)$ achterblijft. Een verandering in een subgebied leidt dan alleen tot een verandering in ρ . Deze eenvoudige aanpak laat bijvoorbeeld snel zien dat per gebied tussen 15 en 40% van het water binnen een dag is afgevoerd, en dat dus tussen 60 en 85% achterblijft.”



Figuur 10: Waterafvoer in de rivier de Vecht bij verschillende scenario’s: het huidige scenario (groen); na de klimaatverandering, maar zonder maatregelen (blauw); het toegestane maximum (rood); na de klimaatverandering, maar met genomen maatregelen (zwart).

Natuurlijke oplossing De belangrijkste conclusie van beide modellen is dat het waterprobleem kan worden opgelost zonder het bouwen van een groot bassin. Het benutten van de natuurlijke opslagcapaciteit van sommige gebieden — door ze indien nodig gecontroleerd onder water te laten lopen — werkt net zo goed als het aanleggen van een nieuw, en waarschijnlijk duur bassin.

Een andere conclusie is dat het handig is om de waterafvoer van subgebieden die ver van de Regge afliggen te vertragen en die van gebieden die op een gemiddelde afstand liggen te versnellen. Dat voorkomt een plotse linge piekafvoer in eerst de Regge, en daarna de Vecht. Stoorvogel: “Met beide modellen kunnen we snel uitrekenen wat de gevolgen zijn voor de waterafvoer bij een verandering in een subgebied. Dat is de waarde van deze modellen.”

“Hoewel de studiegroep geen opzienbarende nieuwe dingen heeft gevonden, geven hun resultaten ons wel handvaten om mee verder te gaan”, reageert Jeroen van der Scheer van Waterschap Regge en Dinkel op het werk van de studiegroep. “Het belangrijkste resultaat is dat wij een bevestiging hebben gekregen van onze eigen resultaten. Hun resultaat, dat het om het even is of je in alle gebieden een beetje doet, of in enkele gebieden een heleboel, is een onderbouwing voor onze strategie om in alle gebieden iets te doen.”

Vooraf had het waterschap zich afgevraagd of de tijdsvertraging die optreedt tussen de opname van de lokale regenval door de bodem en de afvoer naar de Regge op een of andere manier slim gebruikt kan worden. “Maar,” zegt van der Scheer, “de studiegroep heeft laten zien dat het tijds effect te klein is om zinvol te gebruiken bij het watermanagement. Het effect valt in het niet tegenover andere mogelijke oplossingen. Dat is het tweede belangrijke resultaat waarmee we in het vervolg rekening kunnen houden.”

Meer in het algemeen, zegt van der Scheer, kan het waterschap profijt trekken van het feit dat het eenvoudige, analytische model van de studiegroep snel inzichtelijk maakt wat er per gebied gebeurt. “Daarmee hebben we meer inzicht gekregen in ons watersysteem.”

Eind 2008 wil het waterschap met een compleet actieprogramma komen, dat in detail aangeeft welke maatregelen genomen moeten worden om de verwachte extra regenval aan te kunnen. De hoofdoplossing wordt gezocht in een zoveel mogelijk natuurlijke oplossing van het probleem in plaats van het bouwen van extra stuwen en dammen of andere waterwerken. De bedoeling is dat het actieprogramma tussen 2010 en 2050 wordt uitgevoerd in de regio Regge en Dinkel.

Van der Scheer: “In het actieprogramma wijzen we gebieden aan waar

water tijdelijk geparkeerd kan worden door ze onder water te laten lopen. Bij voorkeur zijn dat gebieden die van nature al geschikt zijn om water te parkeren, bijvoorbeeld omdat ze vroeger ook af en toe onder water liepen. Uiteraard moeten dit gebieden zijn waar een overstroming het minste kwaad kan. In totaal zal het gaan om zo'n zeven procent van ons hele beheergebied. Vervolgens moet met de beheerders van de grond geregeld worden dat het gewenste beheer ook mogelijk wordt, en hoe ver een gebied onder water mag komen te staan.”

Patroonherkenning in pulsen van vurende hersencellen

De gemeten elektrische activiteit op een bepaalde plek in de hersenen is de optelsom van duizenden vurende hersencellen. Aan wiskundigen de taak om in die chaos orde te ontdekken.

Onze hersenen bestaan naar schatting uit honderd miljard hersencellen. Elke cel communiceert met duizend tot tienduizend andere. Dat gebeurt deels elektrisch en deels chemisch. Elke keer wanneer een hersencel vuurt, stuurt de cel een elektrisch signaal naar zijn uitlopers. Wanneer het elektrische signaal aan het uiteinde is aangekomen, wordt een chemisch signaal opgewekt, dat via een nauwe spleet naar een volgende hersencel loopt. Zo praat de ene hersencel met de andere, en meestal met vele andere tegelijk.

Een hersenchirurg moet precies weten op welke plek in de hersenen hij een biopt neemt, een tumor verwijdert, een klein hersengebiedje lam legt, of een elektrode implanteert. Op moderne hersenscanners is de locatie alleen maar binnen een paar millimeter nauwkeurig te zien. Om preciezer te weten waar de chirurg bezig is, observeert hij het elektrische signaal. Dat gebeurt via een paar ingebrachte microneaalden. Op een scherm ziet de chirurg dan hoe de hersencellen vuren, en tegelijkertijd luistert hij naar het vuurpatroon. Omdat deze patronen afhangen van de locatie in de hersenen, beoordeelt de chirurg aan de hand van deze patronen of hij de goede plek te pakken heeft of niet. Daar heeft hij veel ervaring voor nodig, maar dan nog heeft hij niet altijd de juiste plek te pakken.

Het Academisch Medisch Centrum (AMC) in Amsterdam onderzoekt of het mogelijk is om de chirurg bij deze patroonherkenning te helpen via een stuk software dat de patroonherkenning automatisch uitvoert. Het AMC is vooral geïnteresseerd in een toepassing bij Deep Brain Stimulation (DBS). Bij DBS wordt lokaal in de hersenen een elektrode geïmplanteerd, die als een soort pacemaker subtiele stroomstootjes kan geven. Vooral patiënten met bijvoorbeeld de ziekte van Parkinson, epilepsie, dwangstoornissen of een zeer ernstige depressie kunnen daar baat bij hebben. DBS behoort inmiddels tot een standaard protocol bij de behandeling van de ziekte van Parkinson.

Geroezemoes Het analyseren van de patronen waarmee zenuwcellen vuren is een klassiek en uitgebreid vakgebied. “Helaas is veel van dat werk niet toepasbaar in de hersenen”, vertelt Lo Bour van het AMC. “In de

hersenen hebben we een veel beperktere meettijd: niet meer dan tien tot twintig seconden om met een elektrode de vuurpatronen van hersencellen te meten. Dat maakt een statistische analyse veel moeilijker dan wanneer je een veel langere meettijd zou hebben.”

Voor de positiebepaling bij DBS gebruikt het AMC momenteel drie tot vijf elektroden die elk een tipdiameter van tien micrometer hebben (een micrometer is een duizendste millimeter). Deze elektroden meten tegelijkertijd het vuren van hersencellen. Wanneer een hersencel vuurt — dat wil zeggen: een signaal doorgeeft aan een naburige hersencel — dan meet een elektrode een elektrische puls, spike geheten. De globale vorm van zo’n spike lijkt op een volle periode van een sinus. De precieze vorm varieert per spike.

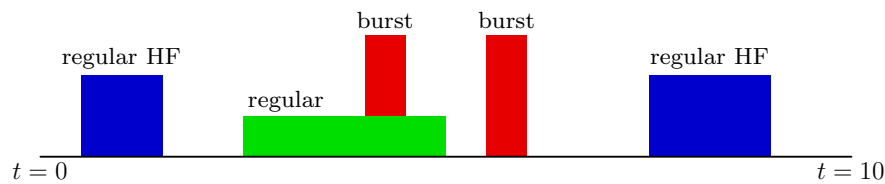
Elke elektrode pikt niet alleen de elektrische signalen op tijdens het vuren van een of een paar hersencellen direct bij de elektrode (binnen honderd micrometer van de tip), maar ook een achtergrond van duizenden vurende hersencellen in de omgeving (binnen een tot twee millimeter van de tip). Het is alsof je met een richtingsmicrofoon naar een persoon in een drukke, grote zaal wilt luisteren. Naast het geluid van die ene persoon hoor je ook het geroezemoes van de honderden mensen daar omheen.

“Wij hebben zelf al uitgebreid onderzoek gedaan naar de analyse van de vuurpatronen”, zegt Bour, “Het fundamentele probleem is dat in een enkele opname zoveel tegelijk gebeurt. Hersencellen genereren spikes met verschillende vormen en in verschillende frequenties. Bovendien kan het vuurpatroon in de tijd veranderen. De grote vraag is hoe we uit deze veelheid van overlappende gegevens de informatie kunnen halen die ons vertelt op welke plek in de hersenen de elektrode zit. Wij wilden graag dat een groep wiskundigen er eens met een frisse blik naar zou kijken om zo misschien met nieuwe ideeën te komen.”

Vuurpatronen Als basismateriaal kregen de wiskundigen de beschikking over meetgegevens van het AMC: tijdreeksen van tien seconden, met daarin typisch zes- tot zevenhonderd spikes. Het doel was om deze tijdreeksen binnen maximaal vijf seconden te analyseren. Want binnen die tijd wil de neurochirurg beslissen of de naald al dan niet op de goede plek zit.

“We hebben het probleem in vier stappen aangepakt”, legt wiskundige Gjerrit Meinsma van de Universiteit Twente, en lid van de studiegroep, uit. “Het begint met het verwijderen van de achtergrondruis. Daarna blijven de spikes waarin we geïnteresseerd zijn over. Die spikes verdelen we in klassen die overeenkomen met verschillende hersencellen. Vervolgens bepalen we voor elke klasse tot welk van drie typen vuurpatronen ze behoren. En ten slotte visualiseren we de resultaten.”

De drie typen vuurpatronen corresponderen met drie verschillende vuurfrequenties: cellen die vuren met een frequentie tussen 5 en 50 hertz; cellen die vuren met een frequentie tussen 50 en 150 hertz; en tenslotte cellen die vuren bij de typische frequentie van 100 hertz: bursts. Bursts hebben het kenmerk dat een actieve periode gevolgd wordt door een inactieve periode. Deze driedeling is een vrij grove, maar voor de praktijk handige indeling (figuur 11).



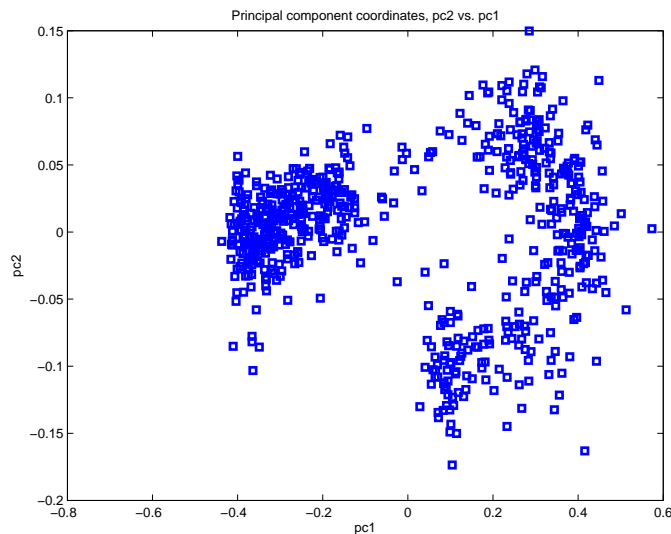
Figuur 11: Hersencellen genereren elektrische vuurpatronen met verschillende vormen en in verschillende frequenties.

De achtergrondruis hebben de wiskundigen uit het signaal verwijderd door een drempelwaarde te definiëren; een bekende methode. Spikes die beneden die drempelwaarde liggen worden uit het signaal verwijderd. Wat overblijft, zijn dan de spikes afkomstig van hersencellen het dichtst bij de naald. Het gefilterde signaal wordt vervolgens gekarakteriseerd door de vorm van de spikes en door hun gedrag in de tijd.

Voor het classificeren van de spikes gebruikten de wiskundigen Principal Component Analysis (PCA), een veel gebruikte techniek in de signaalverwerking. Meinsma: “Het PCA-algoritme haalt uit de data automatisch de parameters die een spike het beste karakteriseren. Aan elke spike worden zo karakteristieke getallen toegekend. In de praktijk bleek de spikeamplitude de belangrijkste bepalende parameter. Vervolgens sorteert PCA de spikes in clusters die qua spikevorm overeenkomen. De meeste opnamen bleken in twee clusters uiteen te vallen, maar sommige in drie clusters. Weer andere opnamen bleken geen duidelijke clustering te vertonen.”

De volgende stap was om te bepalen tot welk van de drie typen vuurpatronen elke klasse behoort. De wiskundigen gebruikten een variant van de autocorrelatiefunctie om dat probleem aan te pakken, het zogeheten Interspike Interval Histogram. Meinsma: “Deze variant is beter dan de autocorrelatiefunctie in staat om het begin- en het eindpunt van een spikereeks in de data te ontdekken, zelfs wanneer een vuurpatroon gevolgd wordt door een periode van inactiviteit. Het histogram laat de tijdsverschillen zien tussen de maxima van de spikes. Daaruit volgt dan vrij eenvoudig de frequentie van een bepaalde spikereeks.”

Wanneer verschillende spikereeksen elkaar niet overlappen, blijkt deze methode vrij goed te werken. Maar in de praktijk kunnen verschillende



Figuur 12: Het PCA-algoritme sorteert spikes in clusters die qua spikevorm overeenkomen. De meeste opnamen bleken in twee clusters uiteen te vallen, maar sommige in drie clusters, zoals in dit voorbeeld.

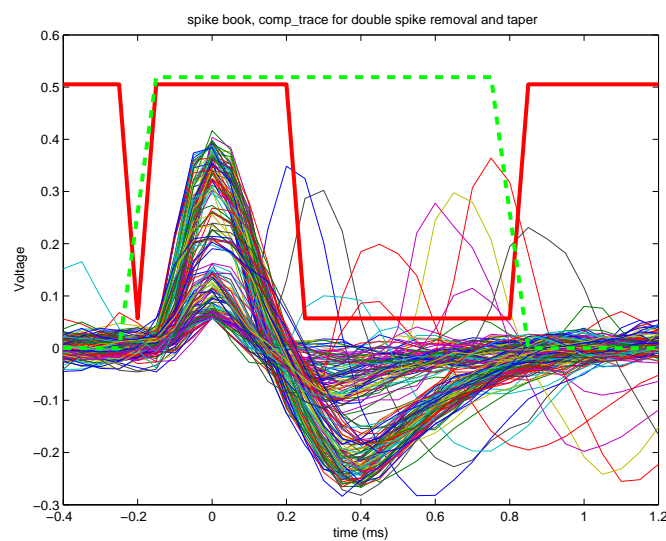
spikereeksen elkaar wel degelijk overlappen. Het is nog onbekend hoe de methode in dat geval uitpakt.

Frequentie verradt locatie “De studiegroep is met twee interessante ideeën gekomen, waar wij graag mee verder gaan”, zegt Lo Bour over de resultaten van de studiegroep. “Het belangrijkste resultaat is het idee om tegelijkertijd informatie over de tijdreeks en informatie over de vorm van de spikes uit het opgenomen signaal te halen. Dan hoeven we niet eerst te bepalen welk deel van het signaal van welke hersencel afkomstig is. Dat is namelijk iets wat bemoeilijkt wordt door het feit dat we maar een vrij korte opname hebben en bovendien doordat die dat signaal in die korte tijd ook nog verandert. Hersencellen vuren niet steeds hetzelfde. Maar we hoeven in feite ook niet te weten welke hersencel welk piekje genereert. Het enige wat we willen weten is met welke frequentie de cellen vuren. Dat vertelt ons de locatie in de hersenen. De wiskundigen suggereren een aanpak die informatie uit het signaal kan halen zonder dat we weten welk piekje van welke cel afkomstig is. Hoewel er nog wel wat werk moet gebeuren voor we dit idee kunnen toepassen, ben ik over dit idee het meest optimistisch.”

Een tweede resultaat dat mogelijk toepasbaar is, is het gebruiken van discrete wiskunde voor de clustering van spikes. Bour: “Met discrete wiskunde kun je aan elke spike gehele getallen toekennen die de belangrijkste

eigenschappen van een spike karakteriseren, zoals de breedte, de hoogte en hoe snel de spike daalt. Dat lijkt op een gewone clusteranalyse, maar het blijkt dat het gebruik van discrete wiskunde voordelen biedt wanneer het om een kleine dataset gaat, zoals bij ons altijd het geval is. Dit is een idee waar ik zelf nooit aan had gedacht, en typisch een voorbeeld van een resultaat dat kan ontstaan als je mensen vanuit een andere achtergrond naar het probleem laat kijken.”

Een concreet product, dat de hersenchirurg helpt in zijn beoordeling van de spikes, ligt nog niet in het verschiet. Daarvoor is nog meer onderzoek nodig.



Figuur 13: In dit voorbeeld werden 674 spikes in een datareeks van tien seconden aangetroffen.